№ 20018

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1991 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය II
(02) Applied Mathematics II

02	
S	II

පැය තුනයි/*Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x-1)(y+2)}{x(y-1)(x+2)}$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ii) $2x + 3y = u$ ආදේශය මගින්

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y + 4}{4x + 6y + 1}$$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(iii) v යනු x හි ශ්‍රිතයක් විට $y = vx$ ආදේශය මගින්

$$x\frac{dy}{dx} = y + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

2. සෘජු මාර්ගයක් ඔස්සේ ධාවනය කෙරෙන බස් රථයක රියදුරෙක්, එයට ඉදිරියෙන් ඇති H බස් නැවතුම් පොළේ බස් රථයට ගොඩ වීමට බලාපොරොත්තුවෙන් සිටින මගියකු දකියි. $AH =$ මීටර a වන පරිදි වූ A නම් ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවන විට බස් රථයේ ප්‍රවේගය u m s^{-1} විය. H හි දී බස් රථය නවතින පරිදි $AB = BC = CH$ වන සේ වූ A, B, C යන ලක්ෂ්‍යවල දී රියදුරු පිට පිට ම තිරිංග යොදයි. AB, BC හා CH ප්‍රාන්තවල දී, බස් රථයේ මන්දන පිළිවෙලින් f, $2f$ හා $3f$ m s^{-2} වෙයි. බස් රථයේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග - කාල වක්‍රයක් අඳින්න. ඒ නයින් හෝ අන් අයුරෙකින් හෝ $f = \dfrac{u^2}{4a}$ බව පෙන්වන්න.

B හා C ලක්ෂ්‍ය වෙත පැමිණීමේ දී බස් රථයේ ප්‍රවේගය, u ඇසුරෙන් සොයන්න. A සිට H තෙක් යාමට ගත වන මුළු කාලය,

$$\frac{4a}{u}\left[1 - \frac{(\sqrt{30} + \sqrt{2})}{12}\right]$$

බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. සරල රේඛාවක් දිගේ චලනය වන අංශුවක්, ඒකක ස්කන්ධයට kv^3 ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය කෙරෙයි. මෙහි v යනු අංශුවේ වේගය ද k යනු නියතයක් ද වෙයි. අංශුව මත ක්‍රියා කරන එක ම බලය ප්‍රතිරෝධය නම් ගමන් කළ x දුර ඇසුරෙන් v ත් t කාලයත් දෙනු ලබන්නේ

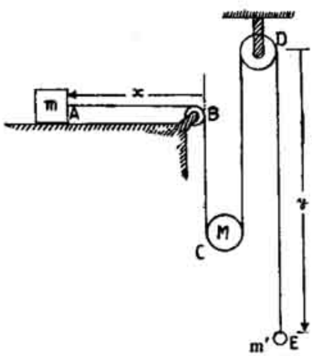
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + kx.$$

$$t = \frac{x}{u} + \frac{1}{2}kx^2,$$

සමීකරණ මගින් බව පෙන්වන්න. එහි u යනු $t = 0$ මොහොතේ දී වේගය යි.

රයිෆලයක් යොදා ගෙන කරන ලද එක්තරා පරීක්ෂණයක දී, රයිෆලයේ කටෙන් උණ්ඩය නිකුත් වූයේ 800 m s^{-1} වේගයෙන් බව ද මීටර 100 ක් ගමන් කළ පසු උණ්ඩයේ වේගය 780 m s^{-1} තෙක් අඩු වූ බව ද නිමාණය කරන ලදී. උණ්ඩයේ චලිතයට ඇති වාත ප්‍රතිරෝධය v^3 ට සමානුපාතික වේ යැ යි උපකල්පනය කරමින් ද ගුරුත්වය නොසලකා හරිමින් ද මීටර 1 000 ක් ගමන් කිරීම සඳහා උණ්ඩයට ගත වන කාලය ආසන්න වශයෙන් තත්පර 1.41 ක් බව පෙන්වන්න.

4.



ඉහත රූප සටහනින් නිරූපණය වන්නේ, අචල සුමට තිරස් මේසයක් මත වන m ස්කන්ධයෙන් යුත් A වස්තුවක් m' ස්කන්ධයෙන් යුත් E අංශුවක් යා කෙරෙන $ABCDE$ ලුහු අවිතත්‍ය තන්තුව සමග කුඩා කප්පිවල සැකසුමකි. B හා D යන අචල සුමට කප්පි උඩින් තන්තුව යවා ඇත. C යනු තන්තුවේ කොටස් දෙක මගින් දරා සිටින ස්කන්ධය M වන චල සුමට කප්පියකි. තන්තුවේ AB කොටස තිරස් වන අතර BC, CD හා DE කොටස් සිරස් ය. t කාලයේ දී පිළිවෙලින් AB හා DE කොටස්වල දිග x ද y ද නම් m, m' හා M ස්කන්ධ සඳහා චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න. තන්තුවේ T ආතතිය

$$T\left[\frac{4}{M} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right] = 3g$$

යන්නෙන් ලැබෙන බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්

$$\frac{2}{M} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m'}$$

නම් C කප්පිය ස්ථාවර ව පවතින බව පෙන්වන්න.

5. ස්කන්ධය M kg වන මෝටර් රථයක එන්ජිමක්, මෝටර් රථය චලනය වන විට වොට් H නියත ජවයක් නිපදවයි. රථයේ චලිතයට ඇති ප්‍රතිරෝධය නියත යි. සමතල පාරක මෝටර් රථයේ උපරිම වේගය V m s^{-1} ය.

(i) තිරසට α කෝණයකින් ආනත පාරක් දිගේ කෙළින් ම ඉහළටත්

(ii) $\sin \alpha < \dfrac{H}{MVg}$ වෙයි නම්, එම පාර දිගේ කෙළින් ම පහළටත්

චලනය වන විට මෝටර් රථයේ උපරිම වේගය සොයන්න.

ආනත පාරේ පහළට එන විට උපරිම වේගය, එම පාරේ ඉහළට යන විට උපරිම වේගය මෙන් දෙගුණයක් වෙයි නම් පාරේ තිරසට α ආනතිය, $\sin \alpha = \dfrac{H}{3\,MVg}$
යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

මෝටර් රථය ආනත පාරේ පහළට චලනය වෙයි නම් ද එහි වේගය V නම් ද රථයේ ත්වරණය කීමෙක් ද?

6. අභ්‍යාසයක්, පැය T කාලයක ගමනක් (පියාසැරුමක්) සඳහා ප්‍රමාණවත් ඉන්ධන රැගෙන යයි. නිසල කාලගුණයක් තිබෙන විට එහි වේගය u km h^{-1} ය. අභ්‍යාසයේ ගමන් (පියාසර) මඟ වෙනස් කිරීම සඳහා ගත වන්නේ නොගිණිය හැකි තරම් කාලයක් යැයි උපකල්පනය කරමින් උතුරේ සිට දකුණු දිශාවට $v\ (<u)$ km h^{-1} වේගයකින් හමන සුළඟක් ඇති විට, θ° උතුරෙන් නැගෙනහිර දිශාවට අභ්‍යාසයේ ක්‍රියාත්මක පරාසය (පිටතට යාම හා ආපසු ඒම),

$$R = \frac{T}{2}\,\frac{(u^2 - v^2)}{\sqrt{(u^2 - v^2 \sin^2\theta)}}$$

බව පෙන්වන්න.

R පරාසය උපරිමයක් වන්නේ θ හි කවර අගයක් සඳහා ද ?

උපරිම පරාසයක් ලබා ගනු වස්, පිටතට පියාසැරුමේ දීත් ආපසු පියාසැරුමේ දීත් අභ්‍යාසය හැසිරවිය යුත්තේ කවර දිශාවලින් ද?

7. සුමට ගෝලයක්, නිශ්චලතාවේ තිබෙන ඊ හා සමාන තවත් ගෝලයක් සමඟ ඝට්ටනය වන්නේ, ගැටුම් මොහොතේ දී ඒවායේ කේන්ද්‍ර රේඛාව සමඟ θ කෝණයක් සාදන දිශාවකිනි. e යනු ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය යි. චලනය වන ගෝලයේ චලිත දිශාව,

$$\tan\phi = \frac{(1 + e)\,x}{1 - e + 2x^2}$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන ϕ කෝණයකින් අපගමනය වන බව පෙන්වන්න. මෙහි $x = \tan\theta$.

θ හි වෙනස් අගයන් සඳහා, $x = \sqrt{\dfrac{1 - e}{2}}$ විට ϕ_0 උපරිම අපගමනය ඇති වන බව අපෝහනය කරන්න.
ϕ_0 සොයන්න.

8. දුර පනින ක්‍රීඩකයකුට, පොළොවෙන් ඉවත් ව යන මොහොතේ දී (ඔහුගේ දිවීම නිසා) u තිරස් ප්‍රවේගයකුත් සමඟ (ඔහුගේ පැනීම නිසා) තිරසට θ කෝණයකින් ආනත λu ප්‍රවේගයකුත් තිබේ. ඔහු පනින l තිරස් දුර,

$$l = \frac{2u^2\lambda}{g}\,(1 + \lambda\cos\theta)\sin\theta$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

තව දුරටත් $\lambda = 1$ ද l උපරිමයක් වන පරිදි θ තෝරා ගන්නේ ද නම් පැනීමේ දී ඔහු ළඟා වන වැඩි ම උස ආසන්න වශයෙන් $\dfrac{l}{7}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

9. ස්වාභාවික දිග $a + b$ ද මාපාංකය λ ද වන AB ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක දෙකෙළවර, සුමට තිරස් මේසයක් මත $a + b$ දුරක පරතරයක් ඇති ව සවි කර තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් P ලක්ෂ්‍යයේ දී තන්තුවට ඈඳා ඇත්තේ අංශුව සමතුලිතතාවේ පවතින විට $AP = a, PB = b$ වන පරිද්දෙනි. අංශුව, $AQ = a + c$ වන පරිදි ඇති Q ලක්ෂ්‍යයේ දී නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබෙයි. එහි $0 < c < b$.

එය, $\pi \sqrt{\frac{m}{\lambda}} (\sqrt{a} + \sqrt{b})$ මුළු කාලයකට පසු ව $\frac{2c}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} + \sqrt{b})$ මුළු දුරක් ගමන් කර Q ලක්ෂ්‍යයට ආපසු පැමිණෙන බව පෙන්වන්න.

10. A හා B යනු B ට ඉහළින් A ද ඒවා අතර c පරතරයක් ද තිබෙන සේ එක ම සිරස් රේඛාවේ පිහිටි අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. නිදහසේ චලනය විය හැකි C නම් බර, කුඩා මුදුවක් තුළින් යැවූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් එම ලක්ෂ්‍ය සම්බන්ධ කර තිබෙයි. C මුදුව, ω නියත කෝණික වේගයක් ඇති ව AB මත කේන්ද්‍රය පිහිටන තිරස් වෘත්තයක් සලකුණු කරන විට A හිත් B හිත් සිට C ට දුර පිළිවෙළින් b හා a වෙයි. $b > a$ බවත් ω^2 යන්න

$$(\cos A - \cos B) \omega^2 = g \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

මගින් දෙනු ලබන බවත් පෙන්වන්න. මෙහි A හා B මගින් පිළිවෙළින් $B\hat{A}C$ හා $A\hat{B}C$ දක්වනු ලැබෙයි.
තව දුරටත්

$$\omega^2 = \frac{2gc}{b - a} \frac{a + b}{\{(a + b)^2 - c^2 \}}$$

බව පෙන්වීමට ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා කෝසයින් සූත්‍රය භාවිත කරන්න.

11. දිග a වන OP ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකට ගැට ගසා ඇති ස්කන්ධය m වන P අංශුවක්, තන්තුව ඇදී පවතිමින්, කේන්ද්‍රය O වන පූර්ණ සිරස් වෘත්තයක භ්‍රමණය වෙයි. පහළ ම පිහිටීමේ දී P හි ප්‍රවේගය V නම් OP රේඛාව යටි සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට තන්තුවේ T ආතතිය

$$T = \frac{m}{a} \; [V^2 - 2ag + 3ag \cos \theta]$$

යන්නෙන් ලැබෙන බවත් $V^2 > 5ag$ බවත් පෙන්වන්න.

තව ද, ඉහළ ම පිහිටීමේ දී P හි ප්‍රවේගය $\frac{V}{2}$ නම් V නිර්ණය කර P අංශුව පහළ ම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතියේත් ඉහළ ම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතියේත් අනුපාතය 19 : 1 බව පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය M ද දිග a ද වන OA ඒකාකාර දණ්ඩක, O කෙළවර හරහා දණ්ඩට ලම්බ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{1}{3} Ma^2$ බව පෙන්වන්න.

දණ්ඩ, O අචල කෙළවර වටා ω කෝණික ප්‍රවේගයෙන් සුමට තිරස් මේසයක් මත වෘත්ත සලකුණු කරයි. O සිට b දුරක තිබෙන m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් දණ්ඩ හා ගැටී දණ්ඩ තුළට කාවදියි. එවිට කෝණික ප්‍රවේගය

$$\frac{M a^2 \omega}{Ma^2 + 3mb^2} \text{ කෙස්}$$

අඩු වන බව පෙන්වන්න.

$Ma^2 = 3mb^2$ නම් ගැටුම නිසා සිදු වන චාලක ශක්තියේ හානිය $\frac{1}{12} Ma^2\omega^2$ බව පෙන්වන්න.